A symbolic umbral characterization of Riordan arrays

José Agapito Ruiz
Centro de Estruturas Lineares e Combinatórias/Universidade de Lisboa

Email: jagruiz@cii.fc.ul.pt

Resumo

Riordan arrays are infinite lower triangular complex valued-matrices that have been applied to a wide range of subjects, from Computer Science to Combinatorial Physics, in connection with combinatorial identities, recurrence relations, walk problems, asymptotic approximation and the problem of normal ordering for boson strings, among other relevant topics. The usual way of approaching Riordan arrays is by means of generating functions.

In this talk we touch upon an alternative characterization of Riordan arrays based on a symbolic renewed approach to umbral calculus. The use of the umbral syntax help us give a unified and a more elucidating treatment of several aspects regarding different known families of Riordan arrays; namely, ordinary, exponential and, on the whole, generalized Riordan arrays with respect to a sequence of nonzero numbers. We thus introduce neat umbral expressions for the group multiplication, the multiplicative inverse of a Riordan array, several known subgroups of the Riordan group, the fundamental theorem (also referred to as the summation formula), various recurrence relations and for general powers of Riordan arrays too. In particular, we show that known and new recurrence relations for Riordan arrays are obtained by means of the so called umbral Abel identity. In this context, we will also see that the known A-sequence of a Riordan array is encoded by an umbra that represents the classical Lagrange inversion formula for formal series.

As a further example of the power and clarity gained by our symbolic approach, we show a family of Riordan arrays that extend the well known Ballot and Catalan arrays. The corresponding combinatorial identities obtained from their recurrence relations seem to be new in the literature.

This talk is partly based on recent joint work with Ângela Mestre, Pasquale Petrullo and Maria Manuel Torres.

Subgrupos maximais do semigrupo profinito livre

Alfredo Costa
Centro de Matemática da Universidade de Coimbra

Email: amgc@mat.uc.pt

Resumo

No estudo da estrutura do semigrupo profinito livremente gerado por um alfabeto finito, coloca-se naturalmente a questão da caracterização dos subgrupos maximais para a inclusão. Estes subgrupos são fechados, e portanto profinitos. Almeida associou, de forma natural, a cada sistema dinâmico simbólico irredutível $\mathscr{X}$, sobre um alfabeto finito A, um subgrupo maximal, denotado por $G(\mathscr{X})$, do semigrupo profinito livremente gerado por A. Baseando-se nesta associação, Almeida construiu os primeiros exemplos de subgrupos maximais (de semigrupos profinitos livres em mais do que um gerador) que são grupos profinitos livres, bem como um primeiro exemplo de um subgrupo maximal que não é livre [1]. Almeida e o orador obtiveram apresentações de $G(\mathscr{X})$ como grupo profinito, quando $\mathscr{X}$ se define por uma substituição primitiva, com as quais foram identificados mais exemplos [2]. Em todos estes casos, $\mathscr{X}$ é minimal e $G(\mathscr{X})$ é finitamente gerado. Por outro lado, Steinberg e o orador provaram que $G(\mathscr{X})$ é um grupo profinito livre de rank $\aleph_0$ quando $\mathscr{X}$ é um sistema sófico irredutível não periódico [3].

Nesta comunicação fazemos um resumo da investigação empreendida neste assunto, com ênfase nos resultados obtidos em co-autoria com Almeida ou Steinberg. Discutimos também alguns problemas em aberto.

Referências

[1] J. Almeida, *Profinite groups associated with weakly primitive substitutions*, Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika **11** (2005), no. 3, 13–48. English version in J. Math. Sciences **144**, No. 2 (2007) 3881–3903.

[2] J. Almeida and A. Costa, *Presentations of Schützenberger groups of minimal subshifts*, Israel J. Math., To appear.

[3] A. Costa and B. Steinberg, *Profinite groups associated to sofic shifts are free*, Proc. London Math. Soc. **102** (2011), 341–369.

Dinâmica de uma aplicação quase-quadrática

Assis Azevedo
Departamento de Matemática e Aplicações/Universidade do Minho

assis@math.uminho.pt

Resumo

Consideramos a aplicação $\chi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dada por $\chi(x) = x\lceil x \rceil$, onde $\lceil x \rceil$ denota o menor inteiro maior ou igual a x. Se x é um número racional chamamos ordem de x ao menor $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $\chi^n(x)$ é um inteiro. Se tal inteiro não existir dizemos que a ordem de x é infinita. Por exemplo, os números do intervalo $]0,1[$ têm ordem infinita, a ordem de $\frac{29}{3}$ é 7, a de $\frac{28}{3}$ é 22.

Dados $M \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}_0$, mostramos que o conjunto

$$\{a \in \mathbb{Z} : (a, M) = 1, \text{ ordem de } \tfrac{a}{M} = n\}$$

é uma união disjunta de $A(n,M)$ classes de congruências módulo M^{n+1}, e estabelecemos um procedimento finito para as obter. Como consequência mostramos que a probabilidade de um número racional ter ordem finita é igual a um.

Em alguns casos encontramos uma expressão fechada para $A(n,M)$. Por exemplo, se p é primo, então $A(n, p^k) = \binom{n+k-2}{n-1} \left(\varphi(p^k)\right)^n$, sendo φ a função de Euler.

Descrevemos ainda um algoritmo eficiente para decidir se um número racional tem uma dada ordem.

Este trabalho foi realizado em colaboração com Maria Carvalho e António Machiavelo do Departamento de Matemática da Universidade do Porto

Finitness conditions on injective hulls of simple modules over Noetherian rings

Paula A.A.B.Carvalho
Faculdade de Ciências/Universidade do Porto

Email: pbcarval@fc.up.pt

Resumo

We will consider the following property of a Noetherian ring A:

($\diamond$) Injective hulls of simple left A-modules are locally Artinian.

A class of algebras called down-up algebras was introduced by G. Benkart and T. Roby in J.Algebra 1998: given parameters α, β, γ in a field K, the down-up algebra $A(\alpha,\beta,\gamma)$ is the associative K-algebra defined by two generators u and d and two cubic relations that depend upon the parameters.

Some examples of down-up algebras with property ($\diamond$) were given in [1]. We will study Noetherian down-up algebras having property ($\diamond$), and in particular we exhibit examples that do not have this property. These examples are constructed using the fact that when $\gamma = 0$, (resp. $\gamma = 1$) the quantum plane, (resp. the quantized Weyl algebra) is an image of $A = A(\alpha,\beta,\gamma)$.

Referências

[1] P.A.A.B. Carvalho, C. Lomp, D. Pusat-Yilmaz, *Injective Modules over Down-Up Algebras*, Glasgow Math. J. 52A (2010) 53-59.

[2] Paula A.A.B. Carvalho, Ian M. Musson, *Monolithic modules over Noetherian rings*, Glasgow Mathematical Journal, Vol.53 n. 03, pp.683-692, 2011

Formas semidefinidas positivas e somas de quadrados

Carla Fidalgo[1] e Alexander Kovacec[2]
[1]Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
[2]Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Email/s: cfidalgo@isec.pt, kovacec@mat.uc.pt

Resumo

Uma forma *diagonal minus tail,* (de grau par) é um polinómio homogéneo real

$$F(x_1,\dots,x_n) = F(\underline{x}) = D(\underline{x}) - T(\underline{x}),$$

cuja parte *diagonal* $D(\underline{x})$ consiste numa soma de termos da forma $b_i x_i^{2d}$ com todos os $b_i \geq 0$ e a *tail* $T(\underline{x})$ na soma de termos $a_{i_1 i_2 \cdots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ com $a_{i_1 i_2 \cdots i_n} > 0$ e pelo menos dois $i_\nu \geq 1$. Mostramos que uma mudança arbitrária dos sinais dos termos da *tail* de uma forma *dmt* semidefinida positiva resulta numa soma de quadrados de polinómios, [1]. O trabalho usa a teoria das *agiforms* de Reznick,[2], e dá-nos condições suficientes, fáceis de testar, para uma forma ser soma de quadrados; uma das quais é linear nos coeficientes do polinómio reminiscente das recentes condições de Lassere, [3], mas provado de modo completamente diferente.

Referências

[1] C. Fidalgo, A. Kovacec, Positive semidefinite diagonal minus tail forms are sums of squares, Mathematische Zeitschrift, Springer, Vol 269, Issue 3, pp 629-645, (2011)

[2] B. Reznick, Forms derived from the arithmetic geometric inequality, Math. Ann. 283, 431-464, (1989)

[3] J. B. Lasserre, Sufficient conditions for a polynomial to be a sum of squares, Arch. Math. 89, 390-398 (2007)

Groups, graphs and surfaces

António Breda d'Azevedo
Universidade de Aveiro

Email: `breda@ua.pt`

Resumo

In a recent paper Maria Elisa (my former PhD student) and myself classify the regular oriented maps (and hypermaps) with a prime number of faces (hyperfaces), extending results of Du, Kwak and Nedela on the classification of regular oriented simple maps with p (prime) faces. In that work we also deduce the chirality group and the chirality index of the maps involved, and a formulae that gives the number of regular oriented maps with p faces of valency n. My talk will consist mostly in explaining, contextualising and illustrating the objects involved in the classification.

Regular maps - mathematical objects relating different fields of mathematics

Roman Nedela
Matej Bel University/ Banska Bystrica

Email: nedela@savbb.sk

Resumo

Regular maps and hypermaps are cellular decompositions of closed surfaces exhibiting the highest possible number of symmetries. The five Platonic solids present the most familiar examples of regular maps. The great dodecahedron, a 5-valent pentagonal regular map on the surface of genus 5 discovered by Kepler, is probably the first known non-spherical regular map. Modern history of regular maps goes back at least to Klein (1878) who described a regular map of type $(3,7)$ on the orientable surface of genus 3. In its early times, the study of regular maps was closely connected with group theory as one can see in Burnside's famous monograph, and more recently in Coxeter's and Moser's book. The present-time interest in regular maps extends to their connection to Dyck's triangle groups, Riemann surfaces, algebraic curves, Galois groups and other areas including the Grothendieck theory. Many of these links are nicely surveyed in the recent papers by Jones and Jones and Singerman.

The presented survey talk is directed on one hand side, to show the relationship of (regular) maps and hypermaps to the above mentioned fields of mathematics. On the other hand, we want to stress some ideas and results that are important for understanding of the nature of these interesting mathematical objects.